



УДК: 537.86/.87:530.182

MSC 2010: 34F05

Экспериментальное исследование стохастической бифуркации Андронова – Хопфа в автогенераторах с аддитивным и параметрическим шумом

В. В. Семёнов, К. В. Закорецкий, Т. Е. Вадивасова

В численном и натурном экспериментах исследуются эффекты шумового воздействия на генераторы у порога генерации. Рассматриваются две качественно различные модели — генератор Ван дер Поля и генератор Анищенко – Астахова. Установлены закономерности эволюции вероятностного распределения с ростом интенсивности шума, характерные для аддитивного и параметрического воздействия гауссова белого шума. Показано, что характерная для зашумленных автоколебаний форма распределения меняется под действием шума, наблюдается сдвиг бифуркации в сторону увеличения параметра возбуждения. Для аддитивного шума экспериментально выявлено существование бифуркационного интервала, соответствующего постепенному переходу к режиму генерации.

Ключевые слова: зашумленные динамические системы, автоколебания, бифуркации, аддитивный шум, параметрический шум

Получено 22 февраля 2013 года

После доработки 18 апреля 2013 года

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России (2009–2013 годы)» (контракты № 14.740.11.0074 и № 14.В37.21.0751).

Семёнов Владимир Викторович

semenov_v_v@list.ru

Закорецкий Кирилл Васильевич

zakoreckiy-kir@mail.ru

Вадивасова Татьяна Евгеньевна

tanya@chaos.ssu.runnet.ru

Саратовской государственной университет им. Н. Г. Чернышевского

410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Введение

Во многих случаях на поведение динамических систем существенным образом влияет шум. Воздействие шума приводит к ряду фундаментальных эффектов, таких как стохастический резонанс [1–3], когерентный резонанс [4, 5], стохастическая синхронизация [6–8], индуцированный шумом хаос [9–11], подавление шумом хаотической динамики [12], синхронизация ансамбля осцилляторов случайной внешней силой [13] и пр. Несмотря на большой интерес к проблемам данной тематики, далеко не все явления изучены в достаточной степени. В частности, картина стохастических бифуркаций (то есть бифуркаций, происходящих в присутствии шума или в результате воздействия шума) все еще оставляет много вопросов. Прежде всего, при рассмотрении систем с шумом меняется само понятие «бифуркация». Для детерминированных систем бифуркации связаны с качественными изменениями устойчивости или структуры предельных множеств в фазовом пространстве (устойчивых и неустойчивых точек равновесия, предельных циклов, сепаратрисных контуров и пр.). В присутствии шума уже нельзя различать предельные множества, характерные для детерминированной системы, поэтому бифуркации стохастических систем обычно связывают с качественными изменениями вероятностного распределения [14, 15].

Одной из важнейших бифуркаций в динамических системах является бифуркация Андронова–Хопфа, которая соответствует переходу в режим генерации. В детерминированном случае мягкое возникновение автоколебаний связано с рождением устойчивого предельного цикла из точки равновесия фокусного типа. Стохастическая бифуркация Андронова–Хопфа приводит к формированию характерного для зашумленных автоколебаний вероятностного распределения, имеющего форму замкнутого кратера. В точках детерминированного цикла имеет место локальный максимум плотности вероятности, а в неустойчивой точке — минимум. Стохастическая бифуркация Андронова–Хопфа была исследована в ряде работ для различной статистики шума [10, 15–21]. В частности, в [10] аналитически и численно было показано, что бифуркация Андронова–Хопфа в генераторе Ван дер Поля с аддитивным шумом происходит не в одной точке (как это следует из квазигармонического приближения), а при прохождении через так называемый бифуркационный интервал, соответствующий постепенной перестройке вероятностного распределения. Ширина этого интервала растет с ростом интенсивности шума. Таким образом, при фиксированном значении управляющего параметра, соответствующем режиму генерации, рост интенсивности шума приводит к переходу внутрь бифуркационного интервала. При этом кратерообразная форма вероятностного распределения разрушается. Существование бифуркационного интервала и запаздывающий характер бифуркации Андронова–Хопфа при цветном параметрическом шуме отмечается в теоретических исследованиях [16, 17]. Анализ гармонического осциллятора Хопфа, проведенный в [19], также выявил запаздывание суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа при параметрическом белом шуме. К сожалению, вблизи бифуркаций, где система структурно неустойчива, а также при большом шуме как приближенные аналитические методы, так и методы численного моделирования могут приводить к заметным ошибкам. В такой ситуации особенно важное значение приобретают натурные эксперименты. Однако в научной литературе число публикаций, посвященных экспериментальному исследованию стохастических бифуркаций, невелико. Насколько нам известно, экспериментальное подтверждение существования бифуркационного интервала при стохастической бифуркации Андронова–Хопфа было дано только в [22] для аналоговой модели брюсселятора с низкочастотным параметрическим шумом.

В данной работе мы имели целью экспериментально исследовать особенности стохастической суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа в различных системах и для различного характера шума. Речь идет как о натурном, так и о численном экспериментах, результаты которых мы сопоставляем. В качестве исследуемых систем нами был выбран генератор Ван дер Поля (как классическая модель периодического автогенератора), и генератор с инерционной нелинейностью Анищенко–Астахова, более сложная автоколебательная система с полутора степенями свободы, также демонстрирующая суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа.

1. Эволюция вероятностного распределения в автогенераторах с аддитивным шумом

В качестве базовой модели для исследования возникновения автоколебаний рассмотрим генератор Ван дер Поля. Стохастические уравнения генератора Ван дер Поля с аддитивным шумом имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (\varepsilon - x^2)y - x + \sqrt{2D}n(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь переменная x и время t являются безразмерными величинами, $n(t)$ — нормированный гауссов источник белого шума, D — интенсивность шума. Уравнение (1.1) описывает многие автоколебательные системы различной природы, в том числе радиотехнический генератор. Параметр ε управляет режимом генератора. В отсутствие шума при $\varepsilon = 0$ имеет место суперкритическая («мягкая») бифуркация Андронова–Хопфа (АХ), в результате которой из устойчивого фокуса в начале координат $x = 0$, $y = 0$ рождается устойчивый предельный цикл. Анализ модели (1.1) в квазигармоническом приближении показывает, что характер стохастической бифуркации и бифуркационное значение параметра $\varepsilon = 0$ не зависят от интенсивности шума D . Однако квазигармоническое приближение корректно при $D \ll \varepsilon^2$, и вблизи значения $\varepsilon = 0$ при конечной интенсивности шума может приводить к ошибочным результатам. В [10] на основании аналитического решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова было получено выражение для вероятностного распределения в автогенераторе, справедливое при $\varepsilon^2 \ll D$:

$$p(x, y) = C \exp \left\{ -\frac{1}{32D}((x^2 + y^2)^2 - 8\varepsilon(x^2 + y^2)) - \frac{3}{4}xy \right\}. \quad (1.2)$$

Анализ выражения (1.2) дает следующую картину стохастической бифуркации: при $\varepsilon < -3D/2$ распределение $p(x, y)$ имеет единственный максимум в начале координат, что соответствует зашумленному состоянию устойчивого равновесия при $x = 0$, $y = 0$. Область $-3D/2 < \varepsilon < 3D/2$ представляет собой бифуркационный интервал. На левой границе интервала $\varepsilon = -3D/2$ в точках $x_{1,2} = \pm\sqrt{(2\varepsilon + 3D)}$, $y_{1,2} = \pm\sqrt{(2\varepsilon + 3D)}$ возникают два максимума, что приводит к разрушению радиальной симметрии распределения. В пределах бифуркационного интервала форма распределения плавно эволюционирует, и при $\varepsilon = 3D/2$ завершается формирование замкнутого кратера вокруг минимума распределения в начале координат, то есть образуется распределение, форма которого характерна для режима автоколебаний в системе с шумом.

В рамках данной работы были проведены предварительные компьютерные эксперименты, основанные на численном интегрировании стохастических уравнений (1.1) и построении

вероятностного распределения $p(x, y)$ путем статистической обработки данных, полученных на достаточно большом интервале времени. Расчеты показали наличие бифуркационного интервала, соответствующего стохастической бифуркации Андронова–Хопфа. Наблюдаемая эволюция плотности вероятности при вариации параметров ε и D , в целом, хорошо согласуется с выводами теории, изложенной в [10].

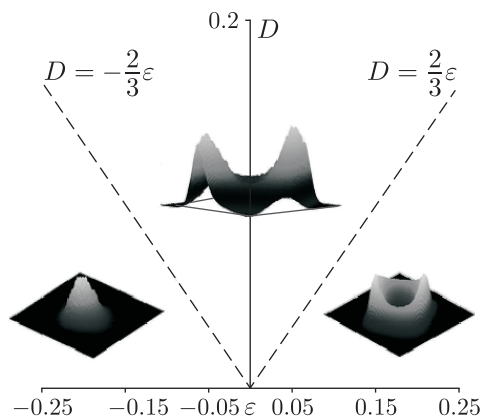


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы (1.1) согласно работе [10] (пунктирные линии обозначают границы бифуркационного интервала) и качественный вид распределения вероятности в различных областях диаграммы (численное моделирование).

В ходе работы был проведен ряд натурных экспериментов, направленных на исследование влияния аддитивного шума на режим автогенерации. С этой целью была создана установка, представляющая собой аналоговую модель системы (1.1). Схема установки представлена на рисунке 2. Уравнения, описывающие эту схему в физических переменных, имеют вид

$$\begin{cases} R_0 C \dot{x} = y, \\ R_0 C \dot{y} = (U - x^2)y - x + \xi(t), \end{cases} \quad (1.3)$$

где x, y — напряжения, снимаемые с соответствующих выходов установки, U — напряжение, которое задает значение параметра ε ($\varepsilon = U$). Параметры схемы подбирались таким образом, чтобы имело место количественное совпадение безразмерных переменных x и $y = \dot{x}$ в (1.1) и соответствующих величин в (1.3). Таким образом, уравнения (1.1) и (1.3) отличаются только масштабом по времени, который в (1.3) задается параметрами $R_0 = 10$ кОм и $C = 10$ нФ.¹ В уравнения (1.3) также входит случайное слагаемое $\xi(t)$, которое описывает напряжение, создаваемое генератором шума. В экспериментах использовался широкополосный генератор гауссова шума Г2-59, спектральная плотность которого практически постоянна в полосе частот 0–100 кГц. В этом частотном диапазоне можно считать $\xi(t) = \sqrt{2\tilde{D}}n(t)$, где $n(t)$ — нормированный источник с единичной спектральной плотностью мощности. Величина $2\tilde{D}$ есть спектральная плотность мощности шумового сигнала, подаваемого на схему, которую можно регулировать в эксперименте. Для удобства сравнения результатов находилась нормированная интенсивность шума D , соответствующая модели (1.1). С учетом масштаба времени имеем: $D = \tilde{D}/R_0 C$. При проведении натурных экспериментов снимались реализации переменных $x(t)$ и $y(t)$, которые оцифровывались с по-

¹Все члены в уравнениях (1.3), независимо от степени, представляют собой напряжения, снимаемые с различных точек схемы и измеряемые в вольтах.

мощью АЦП (NI PCI-6133) и обрабатывались на компьютере, что позволяло получить плотность вероятности $p(x, y)$ и проследить, как она меняется при изменении параметров ϵ и D .

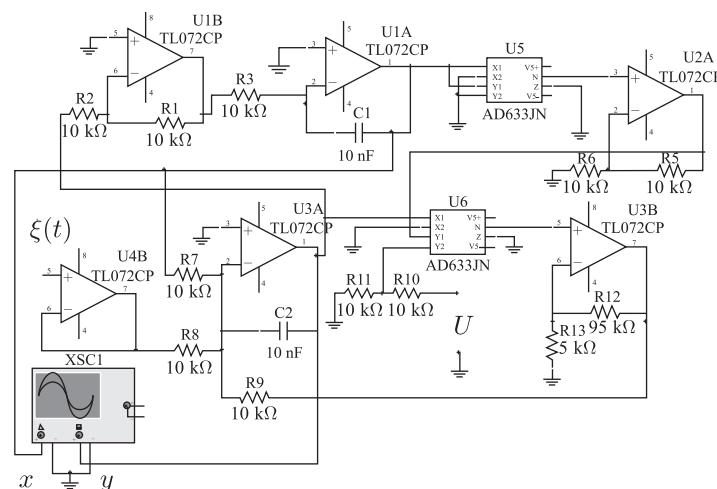


Рис. 2. Принципиальная схема экспериментальной установки (аналоговая модель генератора Ван дер Поля).

Проведенные эксперименты подтвердили наличие бифуркационного интервала и установленную в [10] теоретическую зависимость формы распределения $p(x, y)$ от интенсивности аддитивного шума. В экспериментах с ростом интенсивности шума D при $\varepsilon > 0$ наблюдалось разрушение кратерообразной формы распределения. На рисунке 3а представлена диаграмма режимов автогенератора (1.3) на плоскости параметров $D, \varepsilon > 0$, полученная в результате натурных экспериментов. Пунктирной линией отмечена правая граница бифуркационного интервала для осциллятора Ван дер Поля $\varepsilon = 3D/2$. Эволюция плотности вероятности $p(x, y)$, наблюдаемая в экспериментах с ростом интенсивности шума, проиллюстрирована на рисунке 3б. Полученные в натурном эксперименте результаты находятся в хорошем соответствии с результатами компьютерного моделирования и выводами теории, изложенными в [10].

Можно предположить, что конкретный характер перестройки вероятностного распределения, наблюдаемый с ростом шума, зависит от свойств динамической системы: от ее размерности и формы нелинейности. Однако в любом случае с ростом шума замкнутый кратер, соответствующий зашумленным автоколебаниям, должен разрушаться. В целях проверки данного предположения помимо генератора Ван дер Поля с размерностью фазового пространства, равной двум, экспериментально была исследована также модель генератора с инерционной нелинейностью Анищенко – Астахова, имеющая размерность 3 [23]. Генератор Анищенко – Астахова описывается следующей системой уравнений для безразмерных переменных:

$$\begin{cases} \dot{x} = mx + y - xz + \sqrt{2D}n(t), \\ \dot{y} = -x, \\ \dot{z} = -g(z - F(x)), \\ F(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \end{cases} \quad (1.4)$$

где m, g — управляющие параметры системы, $n(t)$ — нормальный нормированный источник

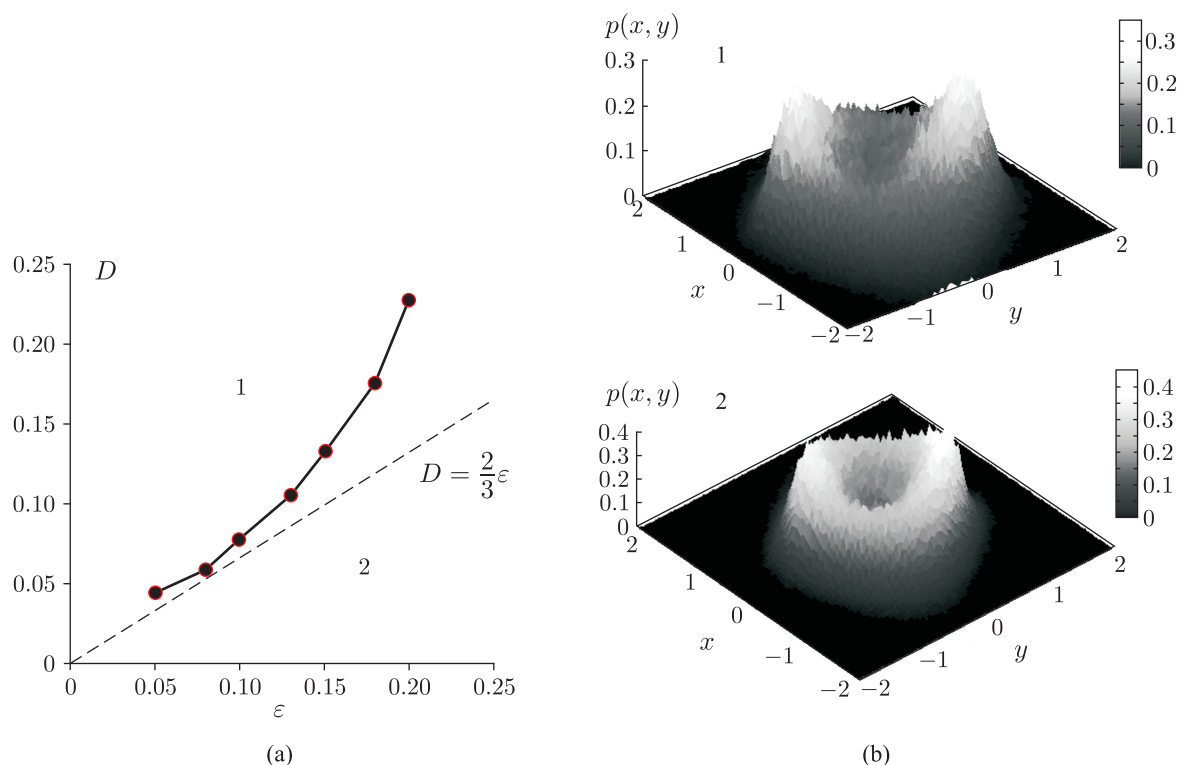


Рис. 3. (а) Экспериментально полученная диаграмма режимов для модели (3) (пунктиром отмечена теоретическая граница бифуркационного интервала в соответствии с [10]); (б) распределения плотности вероятности, типичные для каждой из областей диаграммы.

белого шума, D — интенсивность шума. Система (1.4) при $D = 0$ имеет единственную точку равновесия в начале координат, которая устойчива при $m < 0$ и претерпевает суперкритическую бифуркацию Андронова — Хопфа при $m = 0$. При исследовании стохастической бифуркации в трехмерной системе (1.4) мы ограничились рассмотрением совместного распределения только двух переменных x и y , поскольку в плоскости этих переменных происходит вращение фазовых траекторий вокруг неустойчивой точки равновесия. Для осуществления натурных экспериментов была создана установка, представляющая собой аналоговую модель системы (1.4); схема представлена на рисунке 4. Уравнения, описывающие эту схему в физических переменных, имеют вид

$$\begin{cases} R_0 C \dot{x} = U_1 x + y - xz + \xi(t), \\ R_0 C \dot{y} = -x, \\ R_0 C \dot{z} = -U_2(z - F(x)), \\ F(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \end{cases} \quad (1.5)$$

где x, y, z — напряжения, снимаемые с соответствующих выходов установки, $U_{1,2}$ — напряжения, задающие значения управляющих параметров ($m = U_1, g = U_2$). Как и в случае с генератором Ван дер Поля, параметры схемы подбирались таким образом, чтобы имело место равенство безразмерных переменных x и $y = \dot{x}$ в (1.4) и соответствующих величин

в (1.5). Масштаб времени в (1.5) задается параметрами $R_0 = 10$ кОм и $C = 10$ нФ. Случайное слагаемое $\xi(t)$ описывает напряжение, создаваемое генератором шума (как и в случае с генератором Ван дер Поля): $\xi(t) = \sqrt{2\tilde{D}}n(t)$, $D = \tilde{D}/R_0C$.

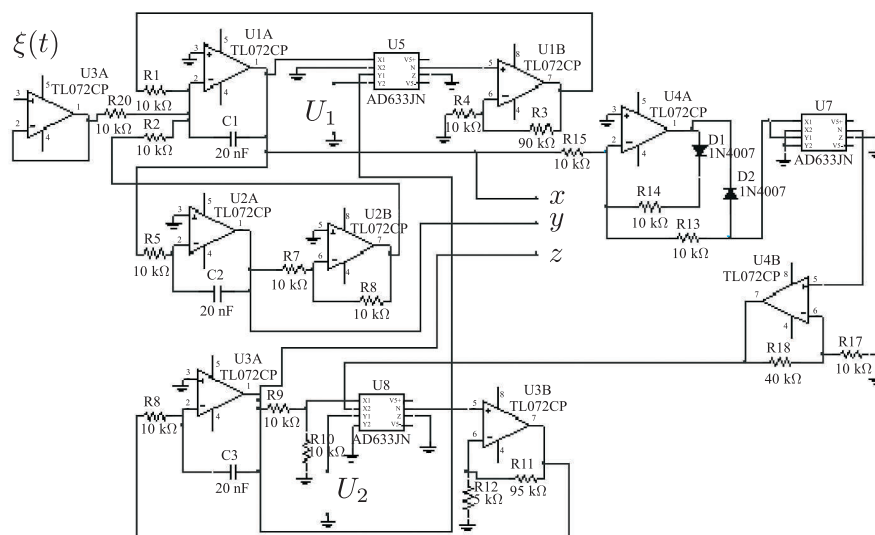


Рис. 4. Принципиальная схема экспериментальной установки (аналоговая модель генератора Анищенко – Астахова).

Численные эксперименты показали, что в (1.4) также наблюдается разрушение кратерообразной формы распределения при увеличении интенсивности шума D , причем происходит разрушение стенки кратера только с одной стороны. На рисунках 5а, б этот эффект хорошо различим. Такой характер эволюции связан с особенностями предельного цикла в генераторе Анищенко – Астахова. Проведенные натурные эксперименты полностью подтвердили тот же характер эволюции вероятностного распределения, который был обнаружен при численном моделировании. Хотя аналоговая модель (1.5) не вполне строго в количественном отношении соответствует уравнениям (1.4) (имеется незначительный сдвиг бифуркационных значений параметров), но качественно экспериментально полученная эволюция плотности вероятности с ростом шума (рис. 5с, д) полностью соответствует данным численного моделирования.

2. Эволюция вероятностного распределения в автогенераторах с мультипликативным шумом

В предыдущем разделе было показано, что аддитивный шум приводит к качественным перестройкам вероятностного распределения. Разрушение кратерообразной формы распределения наблюдалось для двух качественно различных моделей генератора, что позволяет предполагать общий характер данного эффекта для широкого круга автоколебательных систем. Остается открытым вопрос о том, насколько общим этот эффект является по отношению к характеру шумового воздействия. Одним из возможных и распространенных в радиоустройствах типов шума является параметрический шум, представляющий собой случайную модуляцию каких-либо параметров системы. Например, в генераторе Ван дер Поля случайным образом может флуктуировать параметр возбуждения или собственная

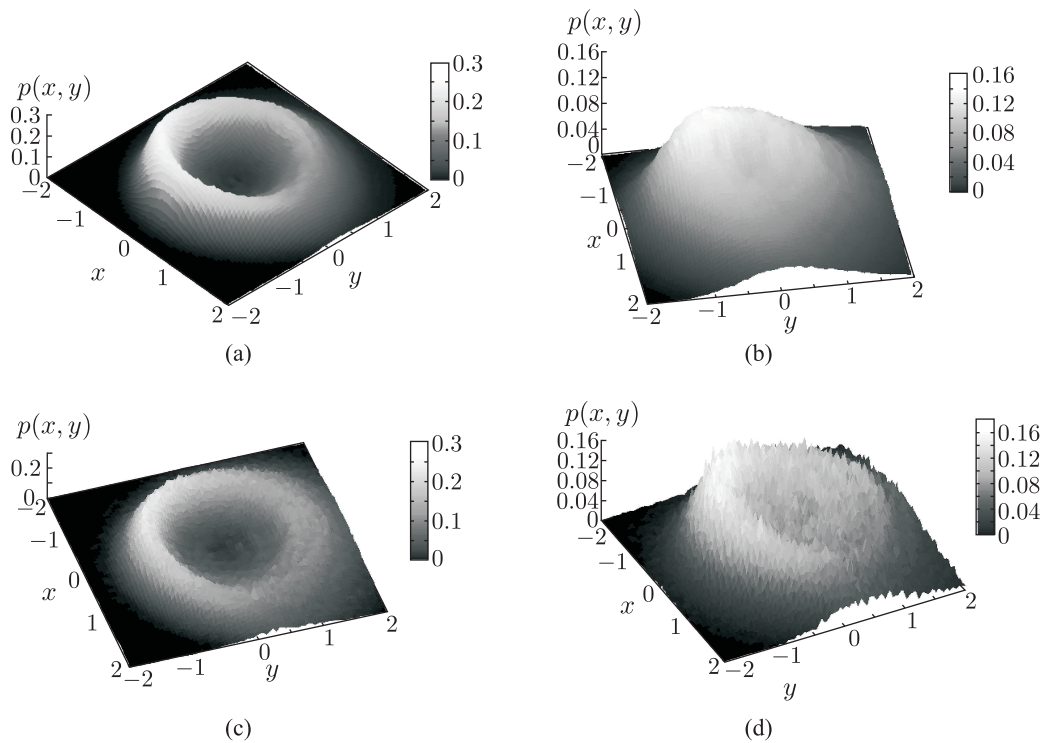


Рис. 5. Распределения вероятности в генераторе Анищенко – Астахова при $m = 0.4, g = 0.25$ и различных интенсивностях аддитивного шума: в численном эксперименте $D = 0.027$ (а), $D = 0.11$ (б), в натурном эксперименте $D = 0.055$ (с), $D = 0.205$ (д).

частота. В обоих случаях параметрический шум оказывается мультипликативным, так как его интенсивность в уравнениях будет зависеть от динамической переменной x или y . К сожалению, в случае параметрического шума нам не удалось получить выражения для плотности вероятности в генераторе Ван дер Поля, аналогичного (1.2). В теоретической работе [16], посвященной цветному параметрическому шуму, делается вывод о существовании бифуркационного интервала и запаздывающем характере бифуркации Андронова – Хопфа при воздействии шума с большим временем корреляции, однако указывается, что в случае малой корреляции шума бифуркация может быть опережающей, то есть происходить раньше, чем в детерминированной системе. Последнее утверждение противоречит результатам, изложенным в [17, 19, 22]. Таким образом, характер влияния параметрического шума на суперкритическую бифуркацию Андронова – Хопфа остается не вполне ясным.

В настоящей работе численно и в натурных экспериментах исследовалась стохастическая суперкритическая бифуркация Андронова – Хопфа в тех же двух генераторах, которые рассматривались в предыдущем разделе, но уже при параметрическом шуме. Вначале снова рассмотрим генератор Ван дер Поля. Безразмерные стохастические уравнения генератора при выбранном типе параметрического шума принимают вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = ((\varepsilon + \sqrt{2D}n(t)) - x^2)y - x, \end{cases} \quad (2.1)$$

где ε — управляющий параметр, $n(t)$ — нормированный источник гауссова белого шума, D — интенсивность шума (то есть шум модулирует параметр возбуждения ε).

В натурных экспериментах использовалась аналоговая модель генератора Ван дер Поля, представленная на рисунке 2, но вместо аддитивного шумового воздействия широкополосный случайный сигнал $\xi(t)$ добавлялся к напряжению U_0 , задающему значение управляющего параметра ε . Следует отметить, что в силу неустраняемых естественных источников флуктуаций аддитивная компонента шума в экспериментальной установке все равно присутствует, но она очень мала по сравнению с внешним параметрическим шумом, создаваемым специальным генератором. Уравнения, описывающие работу экспериментальной установки, имеют вид

$$\begin{cases} R_0 C \dot{x} = y, \\ R_0 C \dot{y} = ((U_0 + \xi(t)) - x^2)y - x. \end{cases} \quad (2.2)$$

Как и ранее, полагаем $\xi(t) = \sqrt{2\tilde{D}}n(t)$, $\tilde{D} = R_0 C D$.

Численные эксперименты показали, что влияние параметрического шума на распределение вероятности носит принципиально иной характер по сравнению с влиянием аддитивного шума. Имеет место «стягивание» кратера, то есть уменьшение его диаметра, что приводит к формированию распределения с одним острым пиком. Такое распределение характерно для зашумленного состояния устойчивого равновесия (рис. 6а, б, в). При фиксированном значении управляющего параметра ε , соответствующего режиму генерации, с увеличением интенсивности шума D в определенной точке происходит качественная перестройка распределения, которую можно трактовать как стохастическую бифуркацию Андронова – Хопфа. Таким образом, присутствие параметрического шума приводит к изменению бифуркационного значения управляющего параметра в сторону его увеличения по сравнению с точкой бифуркации в детерминированной системе. С ростом интенсивности шума смещение бифуркации увеличивается, что согласуется с результатами, изложенными [17, 22]. Однако в отличие от указанных работ мы не зафиксировали существования бифуркационного интервала: переход от распределения с одним максимумом в начале координат к кратерообразному распределению (или наоборот) при вариации одного из параметров происходит в одной точке. Натурные эксперименты полностью подтвердили характер эволюции распределения, полученный при численном моделировании. Эволюция распределения, установленная для генератора Ван дер Поля в численном и натурном экспериментах, имеет большое сходство с результатами теоретического анализа генератора Хопфа [19], который является строго гармоническим и для которого, по этой причине, бифуркационный интервал не может возникнуть.

Экспериментально была снята диаграмма режимов системы (2.2) при $\varepsilon > 0$, представленная на рисунке 7. Изображенная на плоскости параметров линия соответствует стохастической бифуркации Андронова – Хопфа.

Численные и натурные эксперименты были также проведены для генератора Анищенко – Астахова с параметрическим шумом, модулирующим параметр m . В численном эксперименте исследуемая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = (m + \sqrt{2\tilde{D}}n(t))x + y - xz, \\ \dot{y} = -x, \\ \dot{z} = -g(z - F(x)), \\ F(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \end{cases} \quad (2.3)$$

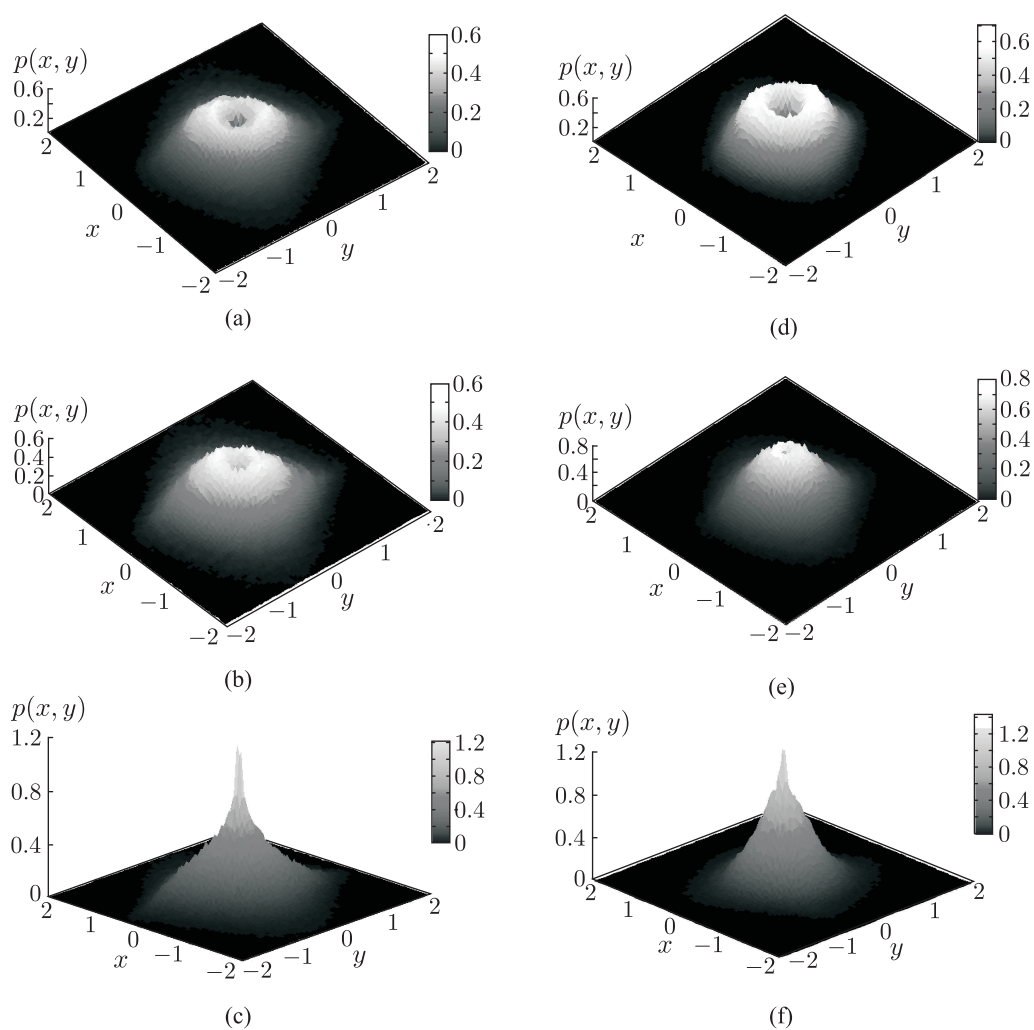


Рис. 6. Распределения вероятности в генераторе Ван дер Поля при $\varepsilon = 0.10$ и различных интенсивностях параметрического шума: в численном эксперименте $D = 0.07$ (a), $D = 0.09$ (b), $D = 0.13$ (c), в натурном эксперименте $D = 0.07$ (d), $D = 0.09$ (e), $D = 0.13$ (f).

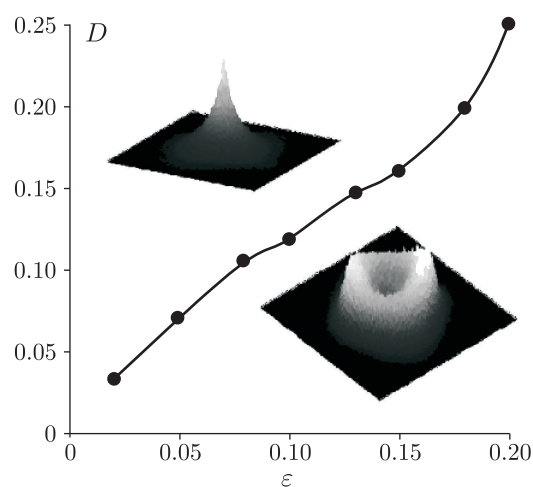


Рис. 7. Экспериментально полученная диаграмма режимов системы (2.2).

где m, g — управляющие параметры системы, $n(t)$ — нормированный источник гауссова белого шума, D — интенсивность шума.

В натурном эксперименте использовалась аналоговая модель генератора Анищенко–Астахова, изображенная на рисунке 5. Аддитивное внешнее воздействие было заменено на случайный сигнал $\xi(t)$, добавляемый к напряжению U_1 , задающему значение управляющего параметра m . Напряжение U_2 , которое задает значение управляющего параметра $g = U_2$, было постоянным ($g = U_2 = 0.25$). Уравнения, описывающие работу экспериментальной установки, имеют вид

$$\begin{cases} R_0 C \dot{x} = (U_0 + \sqrt{2D}n(t))x + y - xz, \\ R_0 C \dot{y} = -x, \\ R_0 C \dot{z} = -g(z - F(x)), \\ F(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.4)$$

Эволюция плотности вероятности с ростом интенсивности параметрического шума представлена на рисунке 8. Как при численном моделировании (рис. 8a, b, c), так и в натурном эксперименте (рис. 8d, e, f) наблюдалась качественно одинаковая картина эволюции. При увеличении интенсивности шума имеет место перестройка вероятностного распределения, при которой происходит «просаживание» стенок кратера и одновременное формирование пика в центре кратера.

Таким образом, эволюция вероятностного распределения в генераторе Анищенко–Астахова при параметрическом шумовом воздействии качественно отличается от той, которая наблюдается в генераторе Ван дер Поля (рис. 6). Она больше напоминает перестройку вероятностного распределения в генераторе с субкритической бифуркацией Андронова–Хопфа [20]. Однако бифуркация в генераторе Анищенко–Астахова является суперкритической. Можно предположить, что в данном случае принципиальной оказывается размерность системы. Точка равновесия в генераторе Анищенко–Астахова после бифуркации является седло-фокусом и помимо неустойчивого двумерного многообразия имеет одномерное устойчивое многообразие, направленное вдоль оси z . Параметрический шум может приводить к появлению фазовых траекторий, стремящихся к точке равновесия вдоль устойчивого многообразия, в результате чего в начале координат (в точке равновесия) максимум распределения возникает раньше, чем разрушается кратер, соответствующий предельному циклу.

Заключение

В работе экспериментально исследовано влияние шума на суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа и установлен характер эволюции вероятностного распределения с увеличением интенсивности шума в генераторе Ван дер Поля и генераторе Анищенко–Астахова в случае аддитивного шума и при шумовой модуляции параметра генерации. Натурные эксперименты с использованием аналоговых схем сопоставлены с результатами компьютерного моделирования.

В случае аддитивного шума для генератора Ван дер Поля эксперименты подтвердили теоретические выводы о существовании бифуркационного интервала при суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа, изложенные в [10]. Верхняя граница бифуркационного интервала при увеличении параметра $\varepsilon > 0$ соответствует переходу от «двугорбого» распределения $p(x, y)$ к распределению в форме замкнутого кратера. В случае генератора

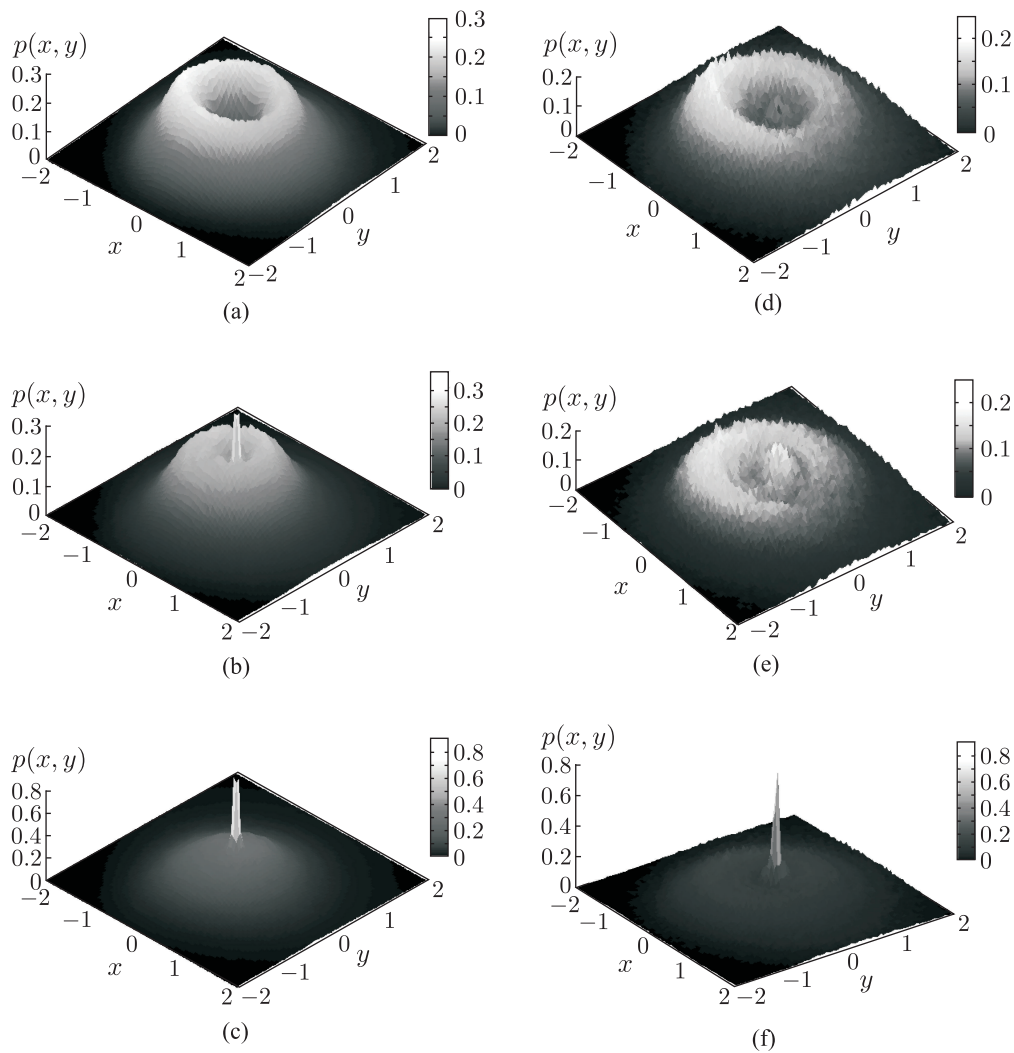


Рис. 8. Распределения плотности вероятности в генераторе Анищенко – Астахова при $m = 0.3$, $g = 0.25$ и различной интенсивности параметрического шума: в численном эксперименте $D = 0.05$ (a), $D = 0.08$ (b), $D = 0.10$ (c), в натурном эксперименте $D = 0.10$ (d), $D = 0.12$ (e), $D = 0.13$ (f).

Анищенко – Астахова с полутора степенями свободы характер перестроек $p(x, y)$ является иным. При увеличении шума происходит разрушение только одной из стенок кратера, в результате чего возникает распределение с одним максимумом. Двугорбая форма распределения не наблюдается. Соответственно, для генератора Анищенко – Астахова нельзя говорить о существовании бифуркационного интервала. В этом случае шум просто приводит к запаздыванию бифуркации, которая смещается в сторону увеличения параметра генерации.

Запаздывание стохастической бифуркации наблюдалось также в экспериментах с параметрическим шумом, что согласуется с теоретическими результатами, приведенными в [17, 19]. В этом случае бифуркационный интервал отсутствует также и для генератора Ван дер Поля. При увеличении параметра генерации стохастическая бифуркация в генераторе Ван дер Поля при параметрическом шуме заключается в переходе от распределения с одним максимумом в точке равновесия к распределению в форме кратера. Если увеличи-

вать шум при фиксированном параметре генерации, то, напротив, кратер в распределении сжимается и исчезает. В генераторе Анищенко–Астахова наблюдается более сложная эволюция распределения $p(x, y)$. Имеется область значений m и D , в которой в распределении наблюдается одновременно наличие замкнутого кратера и пика в точке равновесия в центре кратера.

Во всех рассмотренных случаях рост уровня шума в системе, находящейся в режиме генерации, приводит к исчезновению (разрушению или «стягиванию») замкнутого кратера в распределении, соответствующем зашумленному предельному циклу. В этом смысле можно говорить о разрушении (или подавлении) автоколебаний шумовым воздействием.

Список литературы

- [1] Benzi R., Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance // J. Phys. A, 1981, vol. 14, L453–L457.
- [2] Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichella-Saetta E., Santucci S. Stochastic resonance in bistable systems // Phys. Rev. Lett., 1989, vol. 62, pp. 349–352.
- [3] Анищенко В. С., Нейман А. Б., Мосс Ф., Шиманский-Гаер Л. Стохастический резонанс: индуцированный шумом порядок // УФН, 1999, т. 42, № 1, с. 7–36.
- [4] Pikovsky A., Kurths J. Coherence resonance in a noisy driven excitable system // Phys. Rev. Lett., 1997, vol. 78, pp. 775–778.
- [5] Lindner B., Schimansky-Geier L. Analytical approach to the stochastic FitzHugh–Nagomo system and coherence resonance // Phys. Rev. E, 1999, vol. 60, no. 6, pp. 7270–7277.
- [6] Neiman A. B. Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems // Phys. Rev. E, 1994, vol. 49, pp. 3484–3488.
- [7] Shulgin B., Neiman A., Anishchenko V. Mean switching frequency locking in stochastic bistable system driven by periodic force // Phys. Rev. Lett., 1995, vol. 75, no. 23, pp. 4157–4161.
- [8] Han S. K., Yim T. G., Postnov D. E., Sosnovtseva O. V. Interacting coherence resonance oscillators // Phys. Rev. Lett., 1999, vol. 83, no. 9, pp. 1771–1774.
- [9] Анищенко В. С., Сафонова М. А. Индуцированное шумом экспоненциальное разбегание фазовых траекторий в окрестности регулярных аттракторов // Письма в ЖТФ, 1986, т. 12, № 12, с. 740–744.
- [10] Ebeling W., Herzel H., Richert W., Schimansky-Geier L. Influence of noise on Duffing–van der Pol oscillators // ZAMM, 1986, vol. 66, pp. 141–146.
- [11] Schimansky-Geier L., Herzel H. Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator // J. Stat. Phys., 1993, vol. 70, pp. 141–147.
- [12] Короновский А. А., Москаленко О. И., Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом, единый тип поведения связанных хаотических систем // Докл. РАН, 2006, т. 407, № 6, с. 761–765.
- [13] Goldobin D. S., Pikovsky A. Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise // Phys. Rev. E, 2005, vol. 71, 045201, 4 pp.
- [14] Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. Москва: Мир, 1987. 400 с.
- [15] Arnold L. Random dynamical systems. (Springer Monogr. Math.) Berlin: Springer, 1998. 586 pp.
- [16] Lefever R., Turner J. Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // Phys. Rev. Lett., 1986, vol. 56, pp. 1631–1634.
- [17] Olarrea J., de la Rubia F. J. Stochastic Hopf bifurcation: The effect of colored noise on the bifurcation interval // Phys. Rev. E, 1996, vol. 53, no. 1, pp. 268–271.
- [18] Arnold L., Sri Namachshivaya N., Schenk-Yopp K. R. Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation: A base study // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 1996, vol. 6, pp. 1947–1975.

- [19] Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H. Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances // *Chaos Solitons Fractals*, 2009, vol. 39, pp. 7–16.
- [20] Башкирцева И. А., Перевалова Т. В., Ряшко Л. Б. Анализ индуцированных шумом бифуркаций в системе Хопфа // *ПНД*, 2010, т. 18, № 1, с. 37–50.
- [21] Zakharova A., Vadivasova T., Anishenko V., Koseska A., Kurths J. Stochastic bifurcations and coherencelike resonance in a self-sustained bistable noisy oscillator // *Phys. Rev. E*, 2010, vol. 81, no. 1, 011106, 6 pp.
- [22] Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F. Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // *Phys. Rev. A*, 1987, vol. 36, no. 2, pp. 834–841.
- [23] Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. 2-е изд. Москва: УРСС, 2009. 320 с.

Experimental investigation of stochastic Andronov – Hopf bifurcation in self-sustained oscillators with additive and parametric noise

Vladimir V. Semenov¹, Kirill V. Zakoretskii², Tatyana E. Vadivasova³

Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky

Astrahanskaya st. 83, Saratov, 410026, Russia

¹semenov_v_v@list.ru, ²zakoreckiy-kir@mail.ru, ³tanya@chaos.ssu.runnet.ru

Effects of noisy influence on oscillators near oscillation threshold are studied by means of numerical simulation and natural experiments. Two qualitative different models (Van der Pol and Anishchenko – Astakhov self-sustained oscillators) are considered. Evolution laws of probabilistic distribution with increase of noise intensity are established for two cases: addition of additive and parametric white gaussian noise in researched systems. It is shown that the noise destroys the distribution form, which is typical for self-oscillations, that leads to shift of bifurcation to direction of excitation parameter increase. The existence of bifurcation interval, which corresponds with gradual transition to regime of self-oscillation, was detected from experiments with additive noise.

MSC 2010: 34F05

Keywords: noisy dynamical systems, self-oscillations, bifurcations, additive noise, parametric noise

Received February 22, 2013, accepted April 18, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 421–434 (Russian)

